Erweiterung des Begriffs der Räume skalarer und konstanter Krümmung

Von ARTHUR MOÓR in Szeged

Einleitung

Ein n-dimensionaler Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$, in dem die Metrik durch das Bogenelement

$$ds = \sqrt{g_{ij}(x)\,dx^i dx^j} \qquad (x\colon x^1, x^2, \ldots, x^n) \tag{0.1}$$

bestimmt ist, wird ein Raum von skalarer Krümmung genannt, wenn der durch den metrischen Grundtensor $g_{ij}(x)$ bestimmte Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ die Form

$$R_i{}^j{}_{kl} = 2R(x)g_{i[k}\delta^j_{l]} \text{ [1]} \tag{0.2}$$

hat. Der Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ ist von den g_{ik} durch die sog. Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ abhängig, wo die $\Gamma_i{}^j{}_k$ die aus dem metrischen Grundtensor g_{ik} gebildeten Christoffelschen Symbole sind.

Die Übertragungsparameter $\Gamma_i{}^j{}_k$ bestimmen bekanntlich die Parallelübertragung der Vektoren und die geodätischen Linien des Raumes $\mathfrak{R}_n$.

Bestimmen wir nun die Metrik des Raumes durch die Grundform (0. 1), die Parallelübertragung der Vektoren aber statt der Übertragungsparameter $\Gamma_j{}^i{}_k$ durch andere Übertragungsparameter von der Form:

$$L_i{}^j{}_k = \Gamma_i{}^j{}_k + A_i{}^j{}_k, \tag{0.3}$$

so bekommt man einen Raum $\mathfrak{R}_n^*$, dessen Struktur durch die beiden Fundamentaltensoren g_{ij} und $A_i{}^j{}_k$ bestimmt ist. Aus (0. 3) sieht man nämlich unmittelbar, daß $A_i{}^j{}_k$ nur einen Tensor bedeuten kann, falls die Transformationsformeln von $L_i{}^j{}_k$ und $\Gamma_i{}^j{}_k$ übereinstimmen, was wir im folgenden immer bedingen wollen. Eine derartige „Erweiterung" $\mathfrak{R}_n^*$ des Raumes $\mathfrak{R}_n$ hat sowohl

[1]) Wir verwenden die Schoutensche Symbolik; vgl. [7], insb. Kap. I. § 3. (Die Literatur befindet sich am Ende unserer Arbeit.)

physikalische, wie geometrische Anwendungen. Wir verweisen bezüglich der physikalischen Anwendungen auf die Arbeiten [3] und [5], und bezüglich der geometrischen Anwendungen auf die Arbeiten [6] und [7], Kap. III.

In vorliegender Arbeit sollen $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung, in zu den Riemannschen Räumen skalarer Krümmung formal analoger Weise (d. h. gemäß Formel (0. 2)), definiert werden. Danach soll festgestellt werden, welchen geometrischen Inhalt diese Definitionen haben. Die $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung haben die charakteristische Eigenschaft, daß in diesen Räumen in jedem Punkte und in jeder Richtung eine geodätische Hyperfläche gelegt werden kann. Diese Eigenschaft gibt eine geometrische Verallgemeinerungsmöglichkeit für die Definition der Räume von skalarer Krümmung.

Dementsprechend werden wir in § 1 die Grundformeln der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume zusammenstellen; in § 2 werden wir die Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung angeben und die Gültigkeit des Schurschen Satzes in diesen Räumen untersuchen. In § 3 betrachten wir einige wichtige Grundbegriffe der Theorie der Hyperflächen in Bezug auf die Parallelübertragung der Hyperflächenvektoren und in § 4 und § 5 untersuchen wir die geometrischen Eigenschaften der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung. Endlich, in § 6 wollen wir durch Beispiele die Existenz dieser $\mathfrak{R}_n^*$-Räume beweisen.

§ 1. Grundformeln der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume

In einem n-dimensionalen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum seien die geometrische Struktur bestimmenden Fundamentaltensoren $g_{ij}(x)$ und $A_i{}^j{}_k(x)$, wo der symmetrische Tensor g_{ij} die Metrik des Raumes bestimmt und für $g_{ij}(x)$ die quadratische Form $g_{ij}(x)y^i y^j$ in den Hilfsveränderlichen y^i positiv definit ist. Der Tensor $A_i{}^j{}_k$ definiert durch (0. 3) die Übertragungsparameter des Raumes.

In dem $\mathfrak{R}_n^*$-Raum existieren zwei kovariante und zwei invariante Differentiale je nach den beiden Übertragungsparametern (0. 3) und $\Gamma_j{}^i{}_k$. Die kovariante Ableitung nach den Übertragungsparametern (0. 3) bzw. $\Gamma_j{}^i{}_k$ wollen wir mit $\overset{*}{\nabla}_k$ bzw. ∇_k bezeichnen. Für einen Vektor ξ^i bzw. ξ_i ist also

$$(1.1)\qquad \text{(a)}\quad \nabla_k\xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i + \Gamma_j{}^i{}_k\xi^j, \qquad \text{(b)}\quad \nabla_k\xi_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi_i - \Gamma_i{}^j{}_k\xi_j,$$

$$(1.2)\qquad \text{(a)}\quad \overset{*}{\nabla}_k\xi^i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi^i + L_j{}^i{}_k\xi^j \equiv \nabla_k\xi^i + A_j{}^i{}_k\xi^j,$$

$$(1.2)\qquad \text{(b)}\quad \overset{*}{\nabla}_k\xi_i \overset{\text{def}}{=} \partial_k\xi_i - L_i{}^j{}_k\xi_j \equiv \nabla_k\xi_j - A_i{}^j{}_k\xi_j.$$

Die entsprechenden invarianten Differentiale sind durch die Formeln

$$(1.3)\qquad D\xi^i \overset{\text{def}}{=} \nabla_k\xi^i dx^k, \qquad \overset{*}{D}\xi^i \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{\nabla}_k\xi^i dx^k \equiv D\xi^i + A_j{}^i{}_k\xi^j dx^k$$

bestimmt.

Neben den geodätischen Linien existieren im Raum $\mathfrak{R}_n^*$ die sog. autoparallelen Kurven. Da die Parallelübertragung der Vektoren längs einer Kurve: $x^i = x^i(t)$ durch

$$\frac{\overset{*}{D}\xi^i}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\xi^i}{dt} + L_j{}^i{}_k \xi^j \frac{dx^k}{dt} \tag{1.4}$$

festgelegt ist, definieren die Differentialgleichungen (1. 4) für $\xi^i = \dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$, d. h. die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + L_j{}^i{}_k(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{1.5}$$

solche Kurven, deren Tangentenvektoren $\dot{x}^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$ längs der Kurve parallel verschiebbar sind. Wir bemerken, daß die Gleichungen (1. 5) nicht parameterinvariant sind. Die parameterinvariante Form von (1. 5) ist (vgl. [4] § 7 und § 22)

$$\frac{dx^h}{d\tau}\left(\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + L_j{}^i{}_k \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right) - \frac{dx^i}{d\tau}\left(\frac{d^2x^h}{d\tau^2} + L_j{}^h{}_k \frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\right) = 0. \tag{1.5a}$$

Der affine Parameter t in (1. 5) ist bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Die Kurven (1. 5) nennt man autoparallele Kurven. Der Parameter: t ist in (1. 5) im allgemeinen nicht die Bogenlänge: s, sondern ein geeigneter affiner Parameter des durch $L_{(i}{}^j{}_{k)}$ bestimmten affinen Zusammenhangs (vgl. [4] § 22. Offenbar kommt in (1. 5) nur der symmetrische Teil von $L_i{}^j{}_k$ vor). Ist z. B. die Übertragung (1. 2) metrisch, d. h. $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = 0$, so kann $t = s$ genommen werden da jetzt aus (1. 5)

$$\frac{d}{dt}(g_{ik}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^k) = 0, \quad \text{d. h.} \quad g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k = \text{konst.}$$

folgt. Ist also für einen konstanten Wert t_0

$$g_{ik}(x(t_0))\dot{x}_0^i\dot{x}_0^k = 1, \quad \dot{x}_0^i \stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=t_0},$$

so ist diese Relation längs der ganze Kurve gültig, d. h. $\dot{x}^i$ ist der tangente Einheitsvektor[2]).

Der zu den Übertragungsparametern $L_i{}^j{}_k$ gehörige Krümmungstensor ist durch die Formel

$$\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} 2\partial_{[l}L_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2L_i{}^t{}_{[k}L_{|t|}{}^j{}_{l]}$$

---

[2]) Wäre diese Relation für ein beliebiges t_0 nicht gültig, so würde ihre Gültigkeit nach einer Parametertransformation von der Form $\sigma = ct$ — die den Charakter von (1. 5) unverändert läßt — erreichbar sein. Es wäre dann $\sigma = s$.

festgelegt (vgl. [7] Kap. III, Formel (4. 2))[3]). Auf Grund von (0. 3) kann dieser Tensor auch in der Form:

$$\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl} \equiv R_i{}^j{}_{kl} + S_i{}^j{}_{kl} \tag{1.6}$$

angegeben werden, wo $R_i{}^j{}_{kl}$ der zu den Christoffelschen Symbolen $\Gamma_i{}^j{}_k$ gehörige Riemannsche Krümmungstensor ist, und der Tensor $S_i{}^j{}_{kl}$ durch

$$S_i{}^j{}_{kl} \overset{\text{def}}{=} 2\nabla_{[l}A_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2A_i{}^t{}_{[k}A_{|t|}{}^j{}_{l]} \tag{1.7}$$

bestimmt werden kann [vgl. [7] Kap. III (4. 22a)][4]).

Man kann leicht verifizieren, daß der Krümmungstensor $\overset{*}{R}_i{}^j{}_{kl}$ den folgenden Identitäten — die die Verallgemeinerungen der sog. Bianchischen Identitäten sind — genügt:

$$\overset{*}{\nabla}_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^r{}_{jk]} + 2\overset{*}{R}_i{}^r{}_{[j|t|}\Omega_k{}^t{}_{l]} = 0, \quad \Omega_k{}^t{}_l \overset{\text{def}}{=} A_{[k}{}^t{}_{l]}. \tag{1.8a}$$

(Vgl. [7] Kap. III (5. 19)). Diese Identitäten können auch in der äquivalenten Form:

$$\nabla_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^r{}_{jk]} + A_t{}^r{}_{[l}\overset{*}{R}_{|i|}{}^t{}_{jk]} - A_i{}^t{}_{[l}\overset{*}{R}_{|t|}{}^r{}_{jk]} = 0 \tag{1.8b}$$

angegeben werden. Die entsprechenden Identitäten für den Riemannschen Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ bekommt man aus (1. 8b), wenn $A_i{}^j{}_k = 0$ gesetzt wird.

Wegen seiner Anwendungen in der Geometrie und in der Physik ist der Fall

$$A_{ijk} = -A_{jik}, \quad A_{ijk} \overset{\text{def}}{=} g_{jt}A_i{}^t{}_k \tag{1.9}$$

besonders wichtig. Die Relation (1. 9) bedeutet, daß die durch (0. 3) definierte Übertragung metrisch ist. In diesem Falle existieren also im Raum $\mathfrak{R}_n^*$ zwei metrische kovariante Ableitungen, und zwar (1. 1) und (1. 2) (vgl. [6] § 1). Bezüglich der physikalischen Anwendungen verweisen wir auf die Arbeit [5]. Die Relation (1. 9) beeinflußt die schiefsymmetrischen Eigenschaften der Krümmungstensoren $\overset{*}{R}_{ijkl}$ und S_{ijkl}. Aus (1. 7) folgt dann unmittelbar auf Grund der Formel $\nabla_i g_{jk} = 0$, daß

$$S_{ijkl} = -S_{jikl}$$

ist, und wegen

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} \tag{1.10}$$

wird nach (1. 6) auch der Krümmungstensor $\overset{*}{R}_{ijkl}$ in i, j schiefsymmetrisch.

---

[3]) In der Arbeit [7] sind unsere Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ mit $\Gamma_i{}^j{}_k$ und der Tensor $\overset{*}{R}_h{}^j{}_{kl}$ ist durch $R_{lkh}^{\cdot\cdot\cdot j}$ bezeichnet.

[4]) In der Arbeit [7] sind die Bezeichnungen $\overset{*}{\nabla}_k$ und ∇_k im Vergleich zu unserer Arbeit verwechselt. Statt $A_h{}^j{}_k$ steht in [7] $T_{hk}^{\cdot\cdot j}$ und statt $\Omega_k{}^t{}_l$ steht $S_{kl}^{\cdot\cdot t}$.

Die schiefe Symmetrie von R^*_{ijkl} könnte man übrigens im Falle einer metrischen Übertragung auch von den Identitäten von RICCI leicht ableiten. Die Identitäten von RICCI sind nämlich z. B. für einen Tensor zweiter Stufe:

$$(1.11)\qquad (\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_j - \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_k) T_{ab} = -R^{*\,t}_{a\;jk} T_{tb} - R^{*\,t}_{b\;jk} T_{at} - 2\Omega_j{}^t{}_k \overset{*}{\nabla}_t T_{ab}.$$

Ist nun $\overset{*}{\nabla}_j g_{ab} = 0$, so ergibt (1.11), falls statt T_{ab} der metrische Fundamentaltensor g_{ab} gesetzt wird, unmittelbar die erwähnte Relation $R^*_{(ab)jk} = 0$.

Die geodätischen Linien und die autoparallelen Kurven sind in dem $\mathfrak{R}^*_n$-Raum identisch, falls die Relationen

$$(1.12)\qquad A_i{}^j{}_k = -A_k{}^j{}_i$$

bestehen. Wegen der längs (1.5) gültige Relation

$$\frac{d}{dt}(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j) \equiv (\overset{*}{\nabla}_k g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k \equiv -2A_{(ij)k}\dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k = 0,$$

kann in (1.5) bei diesem Typ $t = s$ gesetzt werden. Dieser, durch (1.12) charakterisierte Typ findet seine physikalische Anwendungen in den Arbeiten I. und II. von [3]. In den durch (1.12) charakterisierten $\mathfrak{R}^*_n$-Räumen ist

$$(1.12a)\qquad A_i{}^j{}_k = \Omega_i{}^j{}_k.$$

Die schiefe Symmetrie der Krümmungstensoren R^*_{ijkl} und S_{ijkl} in den Indizes i und j ist aber jetzt nicht gültig.

Ist endlich

$$(1.13)\qquad A_i{}^j{}_k = A_k{}^j{}_i,$$

so sind die Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ nach den Formeln (0.3) in den Indizes i, k symmetrisch. Auch dieser Typ kann in der Physik angewandt werden (vgl. [3] III und IV). Es gilt jetzt

$$(1.13a)\qquad \Omega_i{}^j{}_k = 0.$$

Die Identitäten (1.8a) für den Krümmungstensor $R^{*\,j}_{i\;kl}$ werden jetzt dieselbe Form haben, wie die Bianchischen Identitäten für den Riemannschen Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$. Statt der kovarianten Ableitung ∇_l steht aber in den Bianchischen Identitäten des Krümmungstensors $R^{*\,j}_{i\;kl}$ die kovariante Ableitung $\overset{*}{\nabla}_l$ (vgl. (1.1) und (1.2)). Der durch (1.13) charakterisierte Fall ist im Wesentlichen die Zusammensetzung eines metrischen und eines affinen Raumes mit symmetrischer Vektorübertragung. Die Vektorübertragung ist zwar nichtmetrisch, doch existiert im Raume eine Bogenlänge für die Kurven und ein Längenbegriff für die Vektoren.

Die Relationen (1.9) und (1.12) können gleichzeitig bestehen. Der Tensor A_{ijk} wird dann in allen seinen Indizes schiefsymmetrisch sein. Das müssen wir noch nur auf j, k beweisen. Es ist aber nach (1.9) und (1.12):

$$A_{ijk} = -A_{jik} = A_{kij} = -A_{ikj},$$

und das beweist unsere Behauptung. Offenbar können (1.12) und (1.13) nur dann gleichzeitig bestehen, wenn $A_{ijk} \equiv 0$ ist. Ebenso folgt aus (1.9) und (1.13), falls diese gleichzeitig bestehen sollen, daß $A_{ijk} \equiv 0$ ist. Es ist nämlich nach (1.9) und (1.13)

$$(1.14) \qquad A_{ijk} = -A_{jik} = -A_{kij} = A_{ikj} = A_{jki} = -A_{kji} = -A_{ijk},$$

d. h. $A_{ijk} = -A_{ijk}$, und das beweist unsere Behauptung.

Selbstverständlich muß in diesem letzten Falle $n > 2$ vorausgesetzt werden, denn vollständig schiefsymmetrische A_{ijk} können nur für $n > 2$ bestehen.

§ 2. Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung

Die Definition der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung wollen wir in der Weise angeben, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum in den gewöhnlichen Riemannschen $\mathfrak{R}_n$-Raum von skalarer Krümmung übergehe, falls $A_i{}^j{}_k = 0$ gesetzt wird. Wir definieren erstens die $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung durch formale Forderungen

D e f i n i t i o n. *Ein $\mathfrak{R}_n^*$-Raum soll ein Raum von skalarer bzw. konstanter Krümmung erster, zweiter, bzw. dritter Gattung genannt werden, falls eine der Relationen*

$$(2.1) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]},$$

$$(2.2) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* \gamma_{i[k} g_{|j|l]}, \qquad (2.2a) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k}\gamma_{|j|l]},$$

$$(2.3) \qquad R^*_{ijkl} = 2R^* g_{i[k} g_{|j|l]}$$

gültig ist. Der Tensor γ_{ik} soll dabei durch die Grundtensoren g_{ab} und $A_a{}^b{}_c$ bestimmt sein. $R^*(x)$ ist der Krümmungsskalar des Raumes; ist R^* eine Konstante, so ist der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von konstanter Krümmung.

Die Typen (2.2) und (2.2a) haben gleichartigen Charakter, somit wollen wir nur (2.2) eingehender untersuchen. Wir werden jetzt einige Sätze in Bezug auf die Räume von skalarer Krümmung beweisen.

Nehmen wir an, daß der nicht unbedingt symmetrische Tensor γ_{ik} durch

$$(2.4) \qquad \overset{*}{\nabla}_j \gamma_{ik} = 0, \quad \mathrm{Det}\,(\gamma_{ik}) \neq 0$$

festgelegt ist. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. *Ist in einem $\mathfrak{R}_n^*$-Raum* $(n>2)$ *von skalarer Krümmung* (2. 1) *und* (2. 4) *gültig, so besteht für den Krümmungsskalar* R^* *die Relation*

$$\partial_k \log|R^*| = \frac{2}{n-1}\left(2\Omega_{k\;t}^{\;t} - A_{t\;k}^{\;t} + \gamma^t_{\;k} A_{(jt)l}\gamma_0^{jl}\right), \tag{2.5}$$

wo γ_0^{jl} *durch*

$$\gamma_{bt}\gamma_0^{ct} = \gamma_{tb}\gamma_0^{tc} = \delta_b^c = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad b=c, \\ 0 & \text{für} \quad b\neq c \end{cases}$$

festgelegt ist. (Selbstverständlich ist γ_0^{ij} von $\gamma^{ij}=g^{it}g^{jr}\gamma_{tr}$ verschieden.)

Beweis. Ziehen wir in (1. 8a) den Index r herab, so wird wegen: $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij} = -2A_{(ij)k}$

$$\overset{*}{\nabla}_{[l} R^*_{|ir|jk]} + 2A_{(tr)[l}R^{*\;\;t}_{|i|\;jk]} + 2R^*_{ir[j|t|}\Omega_{k\;l]}^{\;t} = 0$$

bestehen. Beachten wir jetzt die Gleichungen (2. 1) und (2. 4), so wird:

$$\{2\overset{*}{\nabla}_l R^* \gamma_{i[j}\gamma_{|r|k]} + 4R^*(A_{(tr)l}\gamma_{i[j}\gamma^t_{\;k]} + \Omega_{k\;l}^{\;t}\gamma_{i[j}\gamma_{|r|t]})\} + \{\text{zykl.}\}_{jkl} = 0, \tag{2.6}$$

wo $\{\text{zykl.}\}_{jkl}$ eine zyklische Permutation auf die Indizes j, k, l bedeutet. Man bekommt aus der Formel (2. 6) nach einer Überschiebung mit γ_0^{rk} und dann mit γ_0^{ij} im Hinblick auf die Relation $\gamma_0^{kl}\gamma^t_{\;l} = g^{kt}$:

$$(n-1)(n-2)\overset{*}{\nabla}_l R^* - 2R^*(n-2)\left(2\Omega_{l\;t}^{\;t} - g^{tj}A_{(tj)l} + \gamma^t_{\;l}A_{(jt)k}\gamma_0^{jk}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Beachten wir jetzt, daß für einen Skalar R^*, $\overset{*}{\nabla}_k R^* \equiv \partial_k R^*$ ist, so folgt aus (2. 7) wegen $n>2$ unmittelbar die Formel (2. 5), w. z. b. w.

Der bekannte Schursche Satz behauptet in den Riemannschen Räumen (vgl. [2] § 26), daß *in den Riemannschen Räumen von skalarer Krümmung der Krümmungsskalar* $R^*(x)$ *eine Konstante ist, falls* $n>2$ *besteht*[5]). Als eine unmittelbare Folgerung des Satzes 1 entsteht das folgende

Korollar. *In den durch* (2. 1) *und* (2. 4) *charakterisierten Räumen ist der Schursche Satz dann und nur dann gültig, falls*

$$2\Omega_{k\;t}^{\;t} = A_{t\;k}^{\;t} - \gamma^t_{\;k}A_{(jt)l}\gamma_0^{jl}$$

ist. In diesen $\mathfrak{R}_n^*$*-Räumen von skalarer Krümmung erster Gattung ist* $R^* = konst.$

---

[5]) In der Formulierung des Schurschen Satzes steht in [2] § 26 statt des Begriffs von „Räumen von skalarer Krümmung" der Begriff der Räume, deren Krümmung von der Orientation (d. h. von der Zweistellung) unabhängig ist. Bekanntlich sind aber diese beiden Typen von Riemannschen Räumen identisch.

Ist die Übertragung (0.3) metrisch bezüglich der g_{ik}, so reduziert sich nach (1.9) unsere letzte Formel auf $\Omega_k{}^t{}_t = 0$.

Für die durch (2.2) charakterisierten Räume beweisen wir den folgenden

S a t z 2. a) *Besteht in einem $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung die Relation* (2.2), *ist weiter $R^* \neq 0$ und ist $\gamma_{ik} \neq c\, g_{ik}$, so kann die durch* (1.2) *bestimmte Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf den Grundtensor g_{ik} nicht metrisch sein.*

b) *Sind γ_{ik} und $A_i{}^j{}_k$ in i, k symmetrisch, ist $R^* =$ konst., weiter existiert eine Zahl N derart, daß die letzte Gleichung des Systems*

$$\hat{\gamma}_{l(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)l} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, N+1) \tag{2.8}$$

eine Folge der vorigen sei, und ist endlich $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$ eine Lösung dieses Gleichungssystems, dann ist $\overset{*}{\nabla}_k \gamma_{ij} = 0$.

c) *Ist $\Omega_i{}^j{}_k = 0$, $\overset{*}{\nabla}_k \gamma_{ij} \neq 0$, so ist für $n > 2$*

$$\partial_k \log |R^*| = -\frac{2}{n-1} \gamma_0^{ij} \overset{*}{\nabla}_{[k} \gamma_{|i|j]}.$$

B e w e i s. a) Im vorigen Paragraphen haben wir gezeigt, daß im Falle einer in Bezug auf den metrischen Grundtensor g_{ik} metrischen Übertragung $R^*{}_{(ij)kl} = 0$ ist. Auf Grund von (2.2) wäre dann:

$$\gamma_{i[k} g_{l]j} + \gamma_{j[k} g_{l]i} = 0.$$

Von dieser Gleichung folgt nach einer Überschiebung mit g^{jl}

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{n} C g_{ik}, \quad C \overset{\text{def}}{=} \gamma_{jl} g^{jl}.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer bezüglich des Tensors γ_{ik} gestellten Bedingung.

b) Die Integrabilitätsbedingungen von $\overset{*}{\nabla}_k \hat{\gamma}_{ij} = 0$ sind (vgl. [4] § 29)

$$\hat{\gamma}_{t(i} R^*_{j)}{}^t{}_{kl} = 0, \quad \hat{\gamma}_{t(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} R^*_{j)}{}^t{}_{kl} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Da nach unserer Annahme (2.2) besteht, und $R^* =$ konst. ist, sind die Integrabilitätsbedingungen die folgenden

$$\hat{\gamma}_{l(i} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \gamma_{j)l} = 0,$$

$$\hat{\gamma}_{l(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)k} - \hat{\gamma}_{k(i} \overset{*}{\nabla}_{|m_1} \ldots \overset{*}{\nabla}_{m_r|} \gamma_{j)l} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Ist nun $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$, so ist dieses Gleichungssystem wegen (2.8) erfüllt. (Die erste Integrabilitätsbedingung ist für $\hat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}$ immer identisch erfüllt).

Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist im Falle b) auch ein Riemannscher Raum von konstanter Krümmung mit dem metrischen Fundamentaltensor γ_{ij}. Die Bedingung $A_{[i\ k]}^{\ j}=0$ ($A_{i\ k}^{\ j}$ ist jetzt in i, k symmetrisch) sichert, daß auch $L_{i\ k}^{\ j}$ in i, k symmetrisch ist; dann ist $L_{i\ k}^{\ j}$ aus $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}=0$ eindeutig bestimmbar, falls noch $\det(\gamma_{ij})\neq 0$ ist; die $L_{i\ k}^{\ j}$ werden eben die aus γ_{ij} gebildeten Christoffelschen Symbole. Auf Grund von (2. 2) wird:

$$R_{i\ kl}^{*\ j}=2R^*\gamma_{i[k}\delta_{l]}^j.$$

c) Ist nun $\Omega_{i\ k}^{\ j}=0$, $\overset{*}{\nabla}_k\gamma_{ij}\neq 0$, so wird nach (1. 8a) und (2. 2)

$$\{\overset{*}{\nabla}_l R^*\gamma_{i[j}\delta_{k]}^r+R^*\overset{*}{\nabla}_l\gamma_{i[j}\delta_{k]}^r\}+\{\text{zykl.}\}_{jkl}=0$$

bestehen. Setzen wir $r=k$, summieren wir dann auf k, so wird nach einer Kontraktion mit γ_0^{ij}: $\partial_k\log|R^*|$ die im Satz 2 angegebene Form haben.

Für die Räume skalarer Krümmung dritter Gattung bemerken wir, daß

$$\partial_k\log|R^*|=\frac{4}{n-1}\Omega_{k\ t}^{\ t}$$

bestehen wird, falls $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij}=0$ gültig ist: dies folgt aus (1. 8a) nach einer Verjüngung auf r, k und nach einer darauffolgenden Kontraktion mit g^{ij}. Ist $\overset{*}{\nabla}_k g_{ij}\neq 0$, so besteht der folgende

Satz 3. *Hat der Krümmungstensor R_{ijkl}^* die Form* (2. 3), *so ist für den Krümmungsskalar $R^*(x)$*

$$\partial_k\log|R^*|=\frac{1}{n-1}(A_{k\ t}^{\ t}-A_{tk}^{\ \ t}) \tag{2. 9}$$

gültig, falls $n>2$ besteht.

Beweis. Nach (1. 8b) und (2. 3) wird wegen $\nabla_l g_{ik}=0$, wenn wir noch in (1. 8b) den Index r herabziehen:

$$\{\nabla_l R^* g_{i[j}g_{k]r}+R^*(A_{trl}g_{i[j}\delta_{k]}^t-A_{i\ l}^{\ t}g_{t[j}g_{k]r})\}+\{\text{zykl.}\}_{jkl}=0.$$

Überschieben wir diese Gleichung erstens mit g^{kr} und dann mit g^{ij}, so wird:

$$(n-1)(n-2)\partial_l R^*+(n-2)R^*(A_{tl}^{\ \ t}-A_{l\ t}^{\ t})=0,$$

da $\nabla_l R^*=\partial_l R^*$ ist. Aus unserer letzten Gleichung folgt aber wegen $n>2$ unmittelbar (2. 9), w. z. b. w.

Auch in diesem Falle zeigt die Formel (2. 9), daß der Schursche Satz nur in den durch $A_{k\ t}^{\ t}=A_{tk}^{\ \ t}$ charakterisierten Räumen bestehen kann. Ist A_{ijk} in den ersten beiden Indizes schiefsymmetrisch, so stimmt (2. 9) wegen $A_{tk}^{\ \ t}=-A_{k\ t}^{\ t}$ mit (2. 5) überein.

B e m e r k u n g. Der Teil b) von Satz 2 bestimmt die Bedingungen dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum wieder ein Riemannscher Raum von skalarer Krümmung mit dem Fundamentaltensor γ_{ij} sei. Untersuchungen in Bezug auf das Problem, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum wieder ein allgemeiner Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ sei, befinden sich in [8]. Der Typ (2. 1) bestimmt im allgemeinen keinen Riemannschen Raum von skalarer Krümmung, da

$$R^*{}_i{}^j{}_{kl} \neq R^*(\gamma_{ik}\delta_l^j - \gamma_{il}\delta_k^j),$$

wenn für R^*_{ijkl} die Formel (2. 1) gültig ist. Von den $L_i{}^j{}_k$ erhalt man nämlich $R^*{}_i{}^j{}_{kl}$, und das Herabziehen von j in der Formel (2. 1) geschieht mit g_{jr} und nicht mit γ_{jr}. —

Wir werden jetzt die Räume von skalarer Krümmung durch die Verallgemeinerung einer geometrischen Eigenschaft der Riemannschen Räume von konstanter Krümmung definieren. Die Vektorübertragung des $\mathfrak{R}_n^*$-Raumes induziert auf jede Hyperfläche F_{n-1} eine Parallelübertragung für die Vektoren von F_{n-1}. Auf Grund dieser induzierten Übertragung — die wir im § 3 analytisch formulieren wollen —, können die autoparallelen Linien von F_{n-1} definiert werden. Jetzt können schon die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} — die die Verallgemeinerungen der geodätischen Hyperflächen eines Riemannschen Raumes sind — auch definiert werden.

D e f i n i t i o n. *Eine Hyperfläche F_{n-1} ist eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} von $\mathfrak{R}_n^*$, wenn die bezüglich der induzierten Parallelübertragung von F_{n-1} autoparallelen Linien auch bezüglich der Übertragung von $\mathfrak{R}_n^*$ autoparallel sind.*

Die Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung definieren wir nun in folgender Weise:

D e f i n i t i o n. *Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung, wenn in jedem Punkte P_0 von $\mathfrak{R}_n^*$ und in jeder Richtung eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} gelegt werden kann.* (Der Ausdruck: „in jeder Richtung” bedeutet, daß der Flächennormalenvektor ν_i im Punkte P_0 beliebig angegeben werden kann.)

Im nächsten Paragraphen werden wir die Grundzüge der Theorie der Hyperflächen und die charakteristischen Bedingungsgleichungen der autoparallelen Hyperflächen bestimmen. Erst dann können wir die analytische Formulierung der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung angeben.

§ 3. Grundzüge der Theorie der Hyperflächen im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum

Eine n-dimensionale Hyperfläche F_{n-1} kann durch die Funktionen von $(n-1)$ Veränderlichen

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.1}$$

oder durch die einzige Gleichung von der Form

$$\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0 \tag{3.2}$$

angegeben werden. Die Tangentenvektoren von (3. 1) sind durch

$$B_\varrho^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n-1)$$

bestimmt[6]). Wir werden immer bedingen, daß der Rang der Matrix (B_ϱ^i) gleich $(n-1)$ ist. Der metrische Grundtensor von F_{n-1} soll mit $a_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden; bekanntlich ist $a_{\alpha\beta}$ die Projektion des metrischen Grundtensors g_{ik} auf die Hyperfläche F_{n-1}. In gewöhnlicher Weise definieren wir die kontravarianten Komponenten $a^{\alpha\beta}$ von $a_{\alpha\beta}$ durch die Gleichungen $a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$. Wir benötigen noch die Projektionsvektoren

$$B_i^\sigma \overset{\text{def}}{=} a^{\sigma\varrho} g_{ij} B_\varrho^j, \tag{3.3}$$

die im Wesentlichen nur eine andere Form der Tangentenvektoren sind.

Bezüglich der weiteren Bezeichnungen bemerken wir, daß wir die Flächenkomponenten eines Tensors immer durch griechische Indizes, während die Raumkomponenten durch lateinische Indizes bezeichnen werden.

Der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum induziert eine Parallelübertragung in die Hyperfläche F_{n-1}. Diese induzierte Übertragung wollen wir dadurch festlegen, daß wir fordern, daß das induzierte invariante Differential $\Delta\xi^\varrho$ eines Vektors ξ^ϱ von F_{n-1} gleich die Projektion des invarianten Differentials $\overset{*}{D}\xi^i$ des entsprechenden Raumvektors ξ^i sei. Analytisch gibt diese Forderung die Relation

$$B_r^\varrho \frac{\overset{*}{D}\xi^r}{dt} = \frac{\Delta\xi^\varrho}{dt}. \tag{3.4}$$

Diese Formel ist vollständig analog zur entsprechenden Relation der Riemannschen Geometrie (vgl. [2], Formel (24. 10)). Die Formel (3. 4) ermöglicht, daß mehrere Eigenschaften der geodätischen Linien auch für die autoparallelen Kurven der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume gültig bleiben.

Die Formel (3. 4) ist gleichwertig damit, daß die Übertragungsparameter $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ der Flächenübertragung gleich der Projektion von $L_i{}^j{}_k$ sind. Da die von

---

[6]) Die griechischen Indizes sollen jetzt und in den Paragraphen 3—4 immer die Zahlen $1, 2, \ldots, (n-1)$ bedeuten. Die lateinischen Indizes laufen von 1 bis n.

$a_{\alpha\beta}$ gebildeten Christoffelschen Symbole die Projektion von $\Gamma_i{}^j{}_k$ sind (vgl. [2], § 24, insb. Formel (24. 9)), wird $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ die Projektion von $L_i{}^j{}_k$, falls wir $\Delta_i{}^j{}_k$ auf die Hyperfläche F_{n-1} proizieren, und die Projektion $\Delta_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ von $\Delta_i{}^j{}_k$ zu der Projektion $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ von $\Gamma_i{}^j{}_k$ addieren. — Ist der zu den —von $a_{\alpha\beta}$ gebildeten Flächenübertragungsparametern— $\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ addierte Tensor $\Delta_\alpha{}^\beta{}_\gamma$ nicht die Projektion von $\Delta_i{}^j{}_k$ auf F_{n-1}, sondern „a priori" angegeben, so ist zwar die Fläche F_{n-1} ein $\mathfrak{R}^*_{n-1}$-Raum, doch (3. 4) wird im allgemeinen nicht gültig sein.

Auf Grund der Formel (3. 4) kann der folgende Satz leicht bewiesen werden (für den analogen Satz im $\mathfrak{R}_n$-Raum vgl. [2] Kap. II § 24).

Satz 4. *Ist eine Kurve* $C\colon x^i = x^i(t)$ *einer* F_{n-1} *autoparallel in Bezug auf die Übertragung* $\overset{*}{D}$ *des* $\mathfrak{R}^*_n$*-Raumes, d. h. ist* $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, *so ist* C *auch in Bezug auf die induzierte Übertragung* Δ *von* F_{n-1} *autoparallel, d. h. es ist* $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$.

Ist aber C *autoparallel in Bezug auf die induzierte Übertragung* Δ *von* F_{n-1}, *so ist* C *in Bezug auf die Übertragung* $\overset{*}{D}$ *des* $\mathfrak{R}^*_n$*-Raumes entweder auch autoparallel, oder es steht der „affine Krümmungsvektor"* $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ *von* C *orthogonal auf die Tangentenvektoren von* F_{n-1}.

Bemerkung. $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ ist im allgemeinen nicht parameterinvariant. Da aber nach der Voraussetzung die Kurve C in Bezug auf die Übertragung Δ von F_{n-1} autoparallel ist, bestimmt die Relation $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$ einen ausgezeichneten affinen Parameter t der Flächenübertragung, definiert durch die Übertragungsparameter $\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma$. Es ist dann

$$x^i(t) = x^i(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^{n-1}(t))$$

und $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ kann als ein affiner Krümmungsvektor in Bezug auf die Flächenübertragung Δ betrachtet werden.

Beweis des Satzes 4. Es sei in der Formel (3. 4) der Flächenvektor ξ^ϱ eben der Tangentenvektor $\dot{u}^\varrho$ einer Flächenkurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$.

Ist nun $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, so folgt aus (3. 4) wegen

$$\xi^i = \dot{x}^i = B^i_\varrho \dot{u}^\varrho, \quad \xi^\varrho = \dot{u}^\varrho \tag{3.5}$$

unmittelbar $\Delta\dot{u}^\varrho = 0$, und das beweist die erste Hälfte des Satzes 4.

Nach einer Überschiebung der Formel (3. 4) mit $a_{\varrho\sigma}$ bekommt man auf Grund von (3. 3) und (3. 5)

$$g_{rj} B^j_\sigma \frac{\overset{*}{D}\dot{x}^r}{dt} = a_{\varrho\sigma} \frac{\Delta\dot{u}^\varrho}{dt},$$

woraus die zweite Hälte des Satzes 4 unmittelbar folgt.

In dem Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ kann man im Satz 4 statt autoparallelen Kurven die geodätischen Linien nehmen, da im $\mathfrak{R}_n$ diese Kurven mit den autoparallelen Kurven identisch sind.

Die zweite Hälfte des Satzes 4 drückt aus, daß falls die Kurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$ in Bezug auf die Flächenübertragung $\varDelta$ autoparallel ist, so hat der normierte Krümmungsvektor

$$\eta^i = \varrho(t)\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^i}{dt}, \quad \frac{1}{\varrho(t)} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ik}\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^i}{dt}\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^k}{dt}}$$

die Richtung des Flächennormalenvektors ν_i d. h. $\eta^i = \pm \nu^i$. ($\varrho(t)$ ist bloß ein Normierungsfaktor, und nicht die Krümmung der Kurve, falls t nicht die Bogenlänge ist.) Offenbar ist η^i unbestimmt, wenn $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$, d. h. die Kurve eine autoparallele Linie des $\mathfrak{R}_n^*$-Raumes ist. In diesem Falle kann η^i beliebig gewählt werden. Wir wollen aber auch in diesem Falle η^i durch $\eta^i = \nu^i$ bestimmen. Die zweite Hälfte des Satzes 4 kann also auch in der folgenden wichtigen Form formuliert werden:

Satz 4*. *Ist die Kurve C autoparallel in Bezug auf die induzierte Flächenübertragung, so ist der normierte Krümmungsvektor η^i bis auf Vorzeichen mit dem Flächennormalenvektor ν^i identisch.*

Bemerkung. Der normierte Krümmungsvektor η^i ist in dem Riemannschen Raum der Hauptnormalenvektor der Kurve. Im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist das nicht immer richtig, nur dann, wenn das invariante Differential $\overset{*}{D}$ metrisch ist. In anderen Fällen steht nämlich $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ auf $\dot{x}^i$ nicht immer orthogonal. Aus

$$l^2(t) \overset{\text{def}}{=} g_{ik}(x(t))\dot{x}^i\dot{x}^k$$

sieht man, daß l^2 von dem Tensor A_{ijk} unabhängig ist und es folgt somit nach der Ableitung $\overset{*}{D}/dt$ wegen $\overset{*}{D}g_{ik} = 2A_{(ik)j}dx^j$

$$\frac{dl}{dt}l = \dot{x}^i\dot{x}^j\dot{x}^k A_{(ik)j} + g_{ik}\dot{x}^i\frac{\overset{*}{D}\dot{x}^k}{dt}$$

und das beweist unsere Behauptung. Längs gewisser einzelnen Kurven kann selbtsverständlich $\overset{*}{D}\dot{x}^i$ auf $\dot{x}^i$ orthogonal stehen, wenn nämlich längs einer Kurve $2\frac{dl}{dt}l = \dot{x}^i\dot{x}^k\frac{\overset{*}{D}g_{ik}}{dt}$ gültig ist. Z. B. ist das der Fall auf Grund von Satz 4 längs der autoparallelen Kurven der Hyperfläche. In diesem Falle ist t der durch $\varDelta\dot{u}^\varrho = 0$ bestimmte Parameter.

Wir wollen jetzt die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} untersuchen. Die Definition der autoparallelen Hyperflächen haben wir im Paragraphen 2 angegeben. Mit den Bezeichnungen $\overset{*}{D}$ und Δ der invarianten Differentiale bedeutet die Autoparallelität einer Hyperfläche, daß für eine Kurve $u^\alpha = u^\alpha(t)$ der Hyperfläche aus $\Delta \dot{u}^\varrho = 0$ stets die Relation $\overset{*}{D}(B^i_\varkappa \dot{u}^\varkappa) = 0$ folgen muß.

Offenbar sind auf Grund ihrer Definition die autoparallelen Hyperflächen A_{n-1} im Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ mit den geodätischen Hyperflächen identisch, da die geodätischen Linien im $\mathfrak{R}_n$-Raum zugleich autoparallele Kurven sind.

Wir geben jetzt die analytische Formulierung der A_{n-1}-Fläche von $\mathfrak{R}^*_n$.

Die Fläche A_{n-1} sei durch (3. 2) angegeben. Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmt werden, die die Autoparallelität von (3. 2) sichern. Es besteht der folgende

Satz 5. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die durch* (3. 2) *bestimmte Hyperfläche autoparallel sei, ist die Existenz eines Vektors a_i, derart, daß $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ in der Form*

$$\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi = a_{(i} \overset{*}{\nabla}_{k)} \varphi - \Omega_i{}^r{}_k \overset{*}{\nabla}_r \varphi, \qquad \overset{*}{\nabla}_k \varphi \overset{\text{def}}{=} \partial_k \varphi \tag{3.6}$$

darstellbar ist.

(Im Riemannschen Raum ist $\Omega_i{}^j{}_k \equiv 0$ und statt $\overset{*}{\nabla}_k$ steht ∇_k. Vgl. [1] Kap. VI, § 3, Formel (10)).

Beweis. Es sei $x^i = x^i(t)$ eine beliebige Kurve der Hyperfläche (3. 2). Man hat somit nach (3. 2):

$$\varphi(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)) = 0. \tag{3.7}$$

Nach zweimaliger Ableitung nach t wird:

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \xi^i \xi^k + \overset{*}{\nabla}_i \varphi \frac{\overset{*}{D} \xi^i}{dt} = 0, \quad \xi^i \overset{\text{def}}{=} \dot{x}^i = \frac{\overset{*}{D} x^i}{dt}. \tag{3.8}$$

Ist nun die Kurve $x^i = x^i(t)$ eine autoparallele Kurve des $\mathfrak{R}^*_n$-Raumes d. h. ist $\overset{*}{D} \xi^i = 0$, $\xi^i \equiv \dot{x}^i$, so folgt aus (3. 8):

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \xi^i \xi^k = 0, \quad \text{wenn} \quad (\overset{*}{\nabla}_k \varphi) \xi^i = 0 \tag{3.9}$$

ist. (Die zweite Relation von (3. 9) drückt aus, daß die Kurve auf der Hyperfläche liegt.)

Wir beweisen, daß die Relation (3. 9) für die autoparallelen Hyperflächen charakteristisch ist. Dazu müssen wir noch zeigen, daß aus (3. 9) für jede autoparallele Kurve der Fläche (3. 2) die Relation $\overset{*}{D} \dot{x}^i = 0$ folgt.

Aus (3. 7) folgt aber nach einer Ableitung nach t, daß $n_i = \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ der (nicht unbedingt auf 1 normierte) Normalenvektor der Fläche (3. 2) ist. Ist nun die Kurve $x^i = x^i(t)$ eine autoparallele Kurve der Hyperfläche (3.2), so ist auf Grund des Satzes 4: $\overset{*}{D}\xi^i = \lambda n^i$. Aus (3.8) und (3.9) folgt aber dann $\lambda n_i n^i = 0$, und da die quadratische Form $g_{ik} n^i n^k$ positiv definit ist, wird $\lambda \equiv 0$, d. h. $\overset{*}{D}\dot{x}^i = 0$; das beweist unsere Behauptung bezüglich der Relation (3.9).

Die autoparallelen Hyperflächen könnte man also auch durch (3.9) charakterisieren, wir zeigen aber, daß aus (3.9) die Relation (3.6) folgt. Vor allem bemerken wir, daß in (3.9) nur der symmetrische Teil von $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ d. h. $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$ vorkommt. (3.9) kann man also in der äquivalenten Form

(3.10) $$(\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi)\xi^i \xi^k = 0, \quad \text{wenn} \quad (\overset{*}{\nabla}_k \varphi)\xi^k = 0$$

bestimmen. Ist aber (3.10) eine Folge der Relation $(\overset{*}{\nabla}_k \varphi)\xi^k = 0$, wo ξ^k ein beliebiges Element einer $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit von Vektoren ist, so hat $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$ nach einem Hilfssatz der Tensoralgebra (vgl. [1] S. 133) die Form

(3.11) $$\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi = a_{(i} \overset{*}{\nabla}_{k)} \varphi, \quad \overset{*}{\nabla}_k \varphi \equiv \partial_k \varphi, \quad a_i = a_i(x).$$

(In unserem Falle ist ξ^i in der Gleichung (3.10) ein beliebiges Element der Tangentenvektoren in einem Punkte unserer Hyperfläche.) $\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi$ kann aber immer in der Form

(3.12) $$\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi \equiv \overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi + \overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{i]} \varphi$$

bestimmt werden. Auf Grund der Identität $\Omega_i{}^j{}_k \equiv A_{[i}{}^j{}_{k]}$ folgt die Relation

(3.13) $$\overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{i]} \varphi = -\Omega_i{}^r{}_k \overset{*}{\nabla}_r \varphi.$$

Aus der Formel (3.12) folgt nun unmittelbar auf Grund von (3.11) und (3.13) die Formel (3.6), w. z. b. w.

In dem Riemannschen Raum $\mathfrak{R}_n$ können die geodätischen d. h. die autoparallelen Hyperflächen unter den allgemeinen Hyperflächen durch folgende Eigenschaft charakterisiert werden:

E). *Hat die Hyperfläche F_{n-1} die Eigenschaft, daß sie alle Vektoren dauernd enthält, die längs einer Kurve C von F_{n-1} durch Parallelverschiebung entstanden sind, so ist diese Hyperfläche eine geodätische Hyperfläche.*

Im allgemeinen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum hat eine autoparallele Hyperfläche A_{n-1} nicht immer die Eigenschaft E). Während also im $\mathfrak{R}_n$-Raum durch die Eigenschaft E) die geodätischen Hyperflächen charakterisiert werden können, können durch diese Eigenschaft im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum die A_{n-1}-Flächen im allgemeinen nicht charakterisiert werden. Das kann durch eine einfache Rechnung bestätigt werden, indem wir beweisen, daß eine A_{n-1} nicht alle parallelverschobene Vektoren enthalten muß.

Die Gleichung (3. 2) soll die Gleichung einer A_{n-1} sein. θ^i soll einen Vektor von A_{n-1} und $x^i = x^i(t)$ eine Kurve C von A_{n-1} bedeuten. Analytisch bedeutet das die Gültigkeit der folgenden Relationen:

$$\text{(3. 14)} \qquad \text{(a)}\ \theta^i \overset{*}{\nabla}_i \varphi = 0, \quad \text{(b)}\ \frac{dx^i}{dt} \overset{*}{\nabla}_i \varphi = 0, \quad \overset{*}{\nabla}_i \varphi \equiv \partial_i \varphi.$$

Durch Ableitung nach t von (3. 14) (a) bekommt man die Formel:

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} + \overset{*}{\nabla}_i \varphi \frac{\overset{*}{D}\theta^i}{dt} = 0.$$

Ist nun der Vektor θ^i längs C parallel verschoben, d. h. ist $\frac{\overset{*}{D}\theta^i}{dt} = 0$, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\text{(3. 15)} \qquad (\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Wäre die zur Eigenschaft E) analoge Eigenschaft im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum gültig, dann müßte (3. 15) eine Identität sein, da die Fläche A_{n-1} d. h. $\varphi(x) = 0$ eine autoparallele Hyperfläche ist, und selbstverständlich die Relationen (3. 14) (a) und (b) für den Vektor θ^i bzw. $\frac{dx^i}{dt}$ gültig sind. Aus der charakteristichen Gleichung (3. 6) folgt aber nach (3. 14) (a) und (b):

$$(\overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\nabla}_i \varphi) \theta^i \frac{dx^k}{dt} = -\Omega_i{}^r{}_k \theta^i \overset{*}{\nabla}_r \varphi \frac{dx^k}{dt}.$$

Die Gleichung (3. 15) könnte also nur dann gültig sein, wenn aus (3. 14) die Relation

$$\text{(3. 16)} \qquad \Omega_i{}^r{}_k \theta^i \overset{*}{\nabla}_r \varphi \frac{dx^k}{dt} = 0$$

gefolgert werden könnte. Offenbar ist aber (3. 16) nicht in allen $\mathfrak{R}_n^*$-Räumen für eine A_{n-1} gültig, wenn auch (3. 6) und (3. 14) erfüllt sind.

Der formale Grund dafür, daß im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum die A_{n-1}-Flächen durch die Eigenschaft E) nicht charakterisiert werden können ist das folgende: die Definition der autoparallelen Hyperflächen bestimmt bloß $\overset{*}{\nabla}_{(k} \overset{*}{\nabla}_{i)} \varphi$. Im Riemannschen Raum ist aber $\nabla_{(k} \nabla_{i)} \varphi \equiv \nabla_k \nabla_i \varphi$.

§ 4. Über die Form des Krümmungstensors in den $\mathfrak{R}_n^*$-Räumen von skalarer Krümmung vierter Gattung

In diesem Paragraphen beweisen wir, daß falls der Krümmungstensor eine gewisse Form hat, der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung ist. Es besteht der

Satz 6. *Hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der Relationen:*

$$\frac{1}{2} R_i^{*\,r}{}_{jk} = R^* \gamma_{i[j}\delta_{k]}^r - \overset{*}{\nabla}_{[k}\Omega_{j]}{}^r{}_i + \Omega_i{}^t{}_{[j}\Omega_{k]}{}^r{}_t + \Omega_j{}^t{}_k\Omega_i{}^r{}_t \tag{4.1}$$

und

$$\gamma_{i[j}\overset{*}{\nabla}_{k]}R^* + R^*(\overset{*}{\nabla}_{[k}\gamma_{j]i} - \Omega_i{}^t{}_{[j}\gamma_{k]t} + \Omega_j{}^t{}_k\gamma_{it}) = 0, \quad \gamma_{[ij]} = 0. \tag{4.2}$$

Bemerkung. γ_{ij} spielt in der Formel (4.1) die Rolle des metrischen Grundtensors, wie das ein Vergleich von (0.2) und (4.1) zeigt. Die Formel (4.2) bestimmt den Zusammenhang von γ_{ij} mit $L_i{}^j{}_k$ bzw. mit $\Lambda_i{}^j{}_k$.

Beweis des Satzes 6. Es sei $\Phi(x)$ eine zunächst beliebige Funktion. Wir definieren durch den Ansatz

$$\overset{*}{\nabla}_j p_i = -R^*\Phi\gamma_{ij} - \Omega_i{}^r{}_j p_r \tag{4.3}$$

ein Vektorfeld, wenn γ_{ij} den in (4.1) und (4.2) vorkommenden symmetrischen Tensor bedeutet. Berechnen wir die höheren Ableitungen von p_i gemäß (4.3), so bekommt man wegen der Voraussetzungen (4.1) und (4.2) direkt:

$$\overset{*}{\nabla}_{[k}\overset{*}{\nabla}_{j]}p_i = -\frac{1}{2}R^*{}_i{}^r{}_{jk}p_r - \Omega_j{}^r{}_k\overset{*}{\nabla}_r p_i + R^*\gamma_{i[j}\delta_{k]}^r(p_r - \Phi_r), \tag{4.4}$$

also Übereinstimmung mit den Riccischen Identitäten, falls dabei $p_i = \Phi_i = \overset{*}{\nabla}_i\Phi$ gesetzt wird. Dies ist aber gerechtfertigt, denn aus (4.3) folgt auf Grund von (1.2) (b) und (0.3) sofort:

$$\partial_j p_i = -R^*\gamma_{ij}\Phi + (\Gamma_i{}^t{}_j + \Lambda_{(i}{}^t{}_{j)})p_t = \partial_i p_j. \tag{4.5}$$

Das Differentialgleichungssystem (4.3) ist also unter der Bedingung $d\Phi = p_i dx^i$ integrabel.

Wir müssen noch zeigen, daß im $\mathfrak{R}_n^*$-Raum, für den (4.1) und (4.2) gültig sind, wirklich in jedem Punkt $P_0(\overset{(0)}{x^i})$ eine autoparallele Hyperfläche bestimmt werden kann, deren Normalenvektor: p_i eine beliebig vorgegebene Richtung p_i^0 hat. Wir betrachten die allgemeinste Lösung $p_i = \overset{*}{\nabla}_i\Phi(x)$ des

Differentialgleichungssystems (4. 3) für die

$$\Phi(\overset{(0)}{x^i}) = 0, \quad p_i(\overset{(0)}{x^j}) = p_i^0 \tag{4.6}$$

besteht. Die durch

$$\Phi(x^1, x^2, \ldots, x^n) = 0$$

bestimmte Hyperfläche ist eine autoparallele Hyperfläche. Auf Grund von (4. 3) wird nämlich nach $\overset{*}{\nabla}_k \Phi = p_k$

$$\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i \Phi = -R^* \gamma_{ij} \Phi - \Omega_i{}^r{}_j \overset{*}{\nabla}_r \Phi.$$

Längs der Fläche $\Phi(x) = 0$ ist nun

$$(\overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\nabla}_i \Phi) \xi^i \xi^j = 0,$$

und das ist eben mit der charakteristischen Gleichung (3. 9) der autoparallelen Hyperflächen identisch.

Gewisse spezielle Typen der $\mathfrak{R}_n^*$-Räume von skalarer Krümmung vierter Gattung können auch durch andere Relationen als (4. 1) und (4. 2) charakterisiert werden. Zu solchen Räumen gelangen wir dadurch, daß wir die Integrabilitätsbedingungen der Relationen (3. 6) bestimmen. Der folgende Satz ist gültig:

Satz 7. *Hinreichend dafür, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung sei, ist das Bestehen der folgende Relation für den Krümmungstensor:*

$$\begin{aligned} R_i^{*\,r}{}_{jk} = {} & \delta^r_{[k} \overset{*}{\nabla}_{j]} a_i - \overset{*}{\nabla}_{[k} a_{j]} \delta^r_i - \frac{1}{2} a_i a_{[j} \delta^r_{k]} + 2 \Omega_j{}^t{}_k \Omega_i{}^r{}_t - \\ & - 2(\overset{*}{\nabla}_{[k} \Omega_{j]}{}^r{}_i - \Omega_i{}^t{}_{[j} \Omega_{k]}{}^r{}_t) + a_t(\Omega_i{}^t{}_{[j} \delta^r_{k]} - \Omega_j{}^t{}_k \delta^r_i). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Beweis. Betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\overset{*}{\nabla}_j p_i = a_{(i} p_{j)} - \Omega_i{}^r{}_j p_r. \tag{4.8}$$

Offenbar wird die allgemeinste Lösung $p_i(x)$ von (4. 8) der charakteristischen Gleichung (3. 6) der autoparallelen Hyperflächen genügen, falls $p_i = \overset{*}{\nabla}_i \Phi$ gesetzt werden kann. Durch die Anfangswerte (4. 6) wird die Lösung eine Hyperfläche $\Phi(x) = 0$ bestimmen, die den Punkt $P_0(\overset{(0)}{x^i})$ enthält, und deren Normalenvektor $p_i(x)$ ist.

In analoger Weise, wie beim Beweis von Satz 6 bekommen wir durch die Berechnung der höheren Ableitungen von p_i gemäß (4. 8) wegen der Voraussetzung (4. 7)

$$\overset{*}{\nabla}_{[k} \overset{*}{\nabla}_{j]} p_i = -\frac{1}{2} R_i^{*\,r}{}_{jk} p_r - \Omega^{\,r}{}_k \overset{*}{\nabla}_r p_i,$$

die eben die Riccischen Identitäten für den Vektor p_i sind. Da nach (4.8) und auf Grund von (1.2) (b) und (0.3):

$$\partial_j p_i = a_{(i} p_{j)} + (\Gamma_i{}^r{}_j + \Lambda_{(i}{}^r{}_{j)}) p_r = \partial_i p_j$$

ist, ist (4.8) mit $p_i = \overset{*}{\nabla}_i \Phi$ integrabel, und das beweist den Satz 7.

Wir wollen in einigen Spezialfällen die durch (4.7) charakterisierten Räume näher untersuchen.

Im ersten Falle nehmen wir an, daß der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ von skalarer Krümmung ist. Da jetzt $\Omega_i{}^t{}_k \equiv 0, \overset{*}{\nabla} = \nabla$ und $R_i^*{}^j{}_{kl} = R_i{}^j{}_{kl}$ bestehen, wird aus (4.7)

$$R_i{}^r{}_{jk} = \delta^r_{[k} \left(\nabla_{j]} a_i - \frac{1}{2} a_{j]} a_i \right) - \nabla_{[k} a_{j]} \delta^r_i .$$

Setzen wir $r = k$, so wird nach einer Summation über k

$$R_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2} (n-1) \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right) - \nabla_{[i} a_{j]} .$$

Beachten wir jetzt, daß der Raum $\mathfrak{R}_n$ nach der Annahme ein Raum von skalarer Krümmung ist, d. h. (0.2) besteht, so wird auf Grund von (0.2)

$$R_i{}^k{}_{jk} = (n-1) R g_{ij} .$$

Aus den beiden letzten Formeln folgt

$$\frac{1}{2} (n-1) \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right) - \nabla_{[i} a_{j]} = (n-1) R g_{ij} . \tag{4.9}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung in i, j symmetrisch ist, muß der schiefsymmetrische Teil der linken Seite verschwinden. Daraus bekommt man leicht

$$\nabla_j a_i - \nabla_i a_j = 0,$$

und nach (1.1)

$$\partial_j a_i - \partial_i a_j = 0. \tag{4.10}$$

Der Vektor a_i ist also ein Gradientvektor. Aus (4.9) bekommt man für den metrischen Grundtensor g_{ij} die Form

$$g_{ij} = \frac{1}{2} R^{-1} \left(\nabla_j a_i - \frac{1}{2} a_i a_j \right), \quad a_i \stackrel{\text{def}}{=} \partial_i a . \tag{4.11}$$

Die Bedingungen (4.11) und (0.2) sind offenbar Beschränkungen für den metrischen Grundtensor g_{ij}; für $n = 2$, d. h. für den zweidimensionalen Raum bedeutet schon (0.2) keine weitere Einschränkung, da der Raum $\mathfrak{R}_2$ bekanntlich immer ein Raum von skalarer Krümmung ist.

Die Relation (4. 10) bekommt man auch für einen $\mathfrak{R}_n^*$-Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung, wenn die Relationen

$$(4.12) \qquad \text{(a)} \quad \Omega_i{}^t{}_k = 0, \qquad \text{(b)} \quad \overset{*}{R}{}_{[i}{}^t{}_{k]t} = 0$$

bestehen, d. h. die Übertragung symmetrisch ist, und $\overset{*}{R}{}_i{}^j{}_{kl}$ einen gewissermaßen zum Tensor $R_i{}^j{}_{kl}$ ähnlichen Charakter hat. (4. 12) (b) ist nämlich für den Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ eines Riemannschen Raumes immer gültig (vgl. [2] § 8, insbesondere die Gleichung (8. 14) und die nachfolgenden Zeilen). Aus (4. 7) wird jetzt:

$$(4.13) \qquad \overset{*}{R}{}_i{}^r{}_{jk} = \delta^r_{[k}\left(\overset{*}{\nabla}_{j]}a_i - \frac{1}{2}a_{j]}a_i\right) - \overset{*}{\nabla}_{[k}a_{j]}\delta^r_i.$$

Setzen wir nun in (4. 13) $r = k$, so wird nach einer Summation über k

$$(4.14) \qquad \overset{*}{R}{}_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2}(n-1)\left(\overset{*}{\nabla}_j a_i - \frac{1}{2}a_i a_j\right) + \overset{*}{\nabla}_{[j}a_{i]}.$$

Aus (4. 12) (b) folgt nun leicht wegen (4. 14) die Relation $\overset{*}{\nabla}_{[i}a_{j]} = 0$, und das ergibt wegen (4. 12) (a) die gewünschte Relation (4. 10). Aus (4. 14) wird jetzt

$$\overset{*}{R}_{ij} \overset{\text{def}}{=} \overset{*}{R}{}_i{}^k{}_{jk} = \frac{1}{2}(n-1)\left(\overset{*}{\nabla}_j a_i - \frac{1}{2}a_i a_j\right), \quad a_i \overset{\text{def}}{=} \partial_i a,$$

und somit kann der Krümmungstensor $\overset{*}{R}{}_i{}^r{}_{jk}$ nach (4. 13) wegen $\overset{*}{\nabla}_{[k}a_{j]} = 0$ in der Form

$$(4.15) \qquad \overset{*}{R}{}_i{}^r{}_{jk} = \frac{2}{n-1}\overset{*}{R}_{i[j}\delta^r_{k]}$$

angegeben werden. Wir bemerken noch, daß aus (4. 15) und (4. 14) die Formel (4. 13) folgt, wenn $\overset{*}{\nabla}_{[j}a_{i]} = 0$ ist.

Zuletzt wollen wir noch in diesem Paragraphen bemerken, daß *wenn $\mathfrak{R}_n^*$ ein Raum von skalarer Krümmung vierter Gattung ist und $\Lambda_i{}^j{}_k = \Omega_i{}^j{}_k$ besteht, dann auch der durch g_{ik} bestimmte Riemannsche Raum $\mathfrak{R}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist.* Diese Bemerkung folgt einfach aus der Tatsache, daß jetzt die autoparallelen Kurven von $\mathfrak{R}_n^*$ mit den geodätischen Linien von $\mathfrak{R}_n$ übereinstimmen. Auch aus (4. 1) -falls $\overset{*}{R}{}_i{}^j{}_{kl}$ die Form (4. 1) hat- kann das leicht verifiziert werden. Drücken wir nämlich von der Formel (1. 7) den Tensor $S_i{}^j{}_{kl}$ mit Hilfe der kovarianten Ableitung $\overset{*}{\nabla}_k$ aus, (vgl. die Formeln (1. 2)), so wird:

$$S_i{}^j{}_{kl} = 2\overset{*}{\nabla}_{[l}\Lambda_{|i|}{}^j{}_{k]} + 2\Lambda_i{}^t{}_{[l}\Lambda_{|t|}{}^j{}_{k]} + 2\Lambda_i{}^j{}_t\Omega_k{}^t{}_l,$$

beachten wir dann noch (1. 12a), so folgt aus der Formel (4. 1):

$$\frac{1}{2} R^{*\ r}_{i\ \ jk} = R^{*} \gamma_{i[j} \delta^{r}_{k]} + \frac{1}{2} S_{i\ \ jk}^{\ r}.$$

Nach (1. 6) folgt dann nach Herunterziehen von r, daß

$$\frac{1}{2} R_{irjk} = R^{*} \gamma_{i[j} g_{k]r} \tag{4.16}$$

besteht. Beachten wir jetzt (1. 10), und setzen wir für R_{ijkl} den Ausdruck von (4. 16) ein, so erhält man nach einer Kontraktion von (1. 10) mit g^{jl} für γ_{ik} die Form; $\gamma_{ik} = c\ g_{ik}$ und das beweist nach (4. 16), daß $\mathfrak{R}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung ist.

§ 5. Über die Krümmung der autoparallelen Unterräume bei den symmetrischen Übertragungen

In der Theorie der Riemannschen Räume spielen die zweidimensionalen, in einem Punkte P_0 geodätischen Flächen G_2 bei der Bestimmung der Raumkrümmung eine wichtige Rolle (vgl. [2] § 25), da die Krümmung von G_2 in P_0 eben die in der Richtung von G_2 in P_0 bestimmte Raumkrümmung definiert. In gewissen speziellen $\mathfrak{R}^{*}_{n}$-Räume kann für die in einem Punkte autoparallelen Flächen ein etwas schwächerer Satz bewiesen werden.

Nehmen wir an, daß *die durch die Übertragungsparameter* (0. 3) *bestimmte Übertragung symmetrisch ist,* d. h. $\Omega_{i\ k}^{\ j} = 0$ besteht. In einem Punkte P_0 können dann bezüglich dieser symmetrischen Übertragungsparameter $L_{i\ k}^{\ j}$ Normalkoordinaten eingeführt werden, in der Weise, daß P_0 der Anfangspunkt mit den Koordinaten $(0, \ldots, 0)$ sei (vgl. [4] § 22). Die Gleichung der autoparallelen Kurven durch P_0 hat dann die Form (vgl. [4] Formel (23. 1))

$$x^i = \xi^i t.$$

Wir betrachten nun in P_0 m linear unabhängige Vektoren ξ^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$.[7]) Diese Vektoren bestimmen einen in P_0 autoparallelen Unterraum $\overset{0}{A}_m$ mit den Gleichungen

$$x^i = \xi^i_\alpha u^\alpha. \tag{5.1}$$

Wir beweisen den folgenden

[7]) Die griechischen Indizes sollen in diesem Paragraphen die Zahlen $1, 2, \ldots, m$ bedeuten.

S a t z 8. *Ist* $\Omega_i{}^j{}_k = 0$, *so ist der Krümmungstensor* $\overset{*}{R}{}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ *des durch* (5. 1) *bestimmten im Punkte* P_0 *autoparallelen Unterraumes* $\overset{0}{A}_m$ *die Projektion des Krümmungstensors* $\overset{*}{R}_{ijkl}$ *von* $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$, d. h.

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}\Big|_{u^\tau=0} = \overset{*}{R}_{ijkl}\,\xi^i_\alpha \xi^j_\beta \xi^k_\gamma \xi^l_\delta\Big|_{x^t=0}. \tag{5.2}$$

B e w e i s. Bezeichnen wir mit

$$a_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} g_{ij}\,\xi^i_\alpha \xi^j_\beta$$

den metrischen Grundtensor von $\overset{0}{A}_m$, so werden die Festsetzungen von § 3 bezüglich der induzierten Flächenübertragung auch in diesem Falle gültig sein, da ja für die Flächenübertragungsparameter die Dimensionszahl keinen Einfluß hatte. Der einzige Unterschied ist jetzt, daß die Projektionsvektoren $B^i_\varrho = \xi^i_\varrho$ Konstanten sind, und somit bekommt man für die Projektion $\Gamma_i{}^j{}_k$

$$\Gamma_\alpha{}^\beta{}_\gamma = \Gamma_i{}^j{}_k\,\xi^i_\alpha \xi^\beta_j \xi^k_\gamma. \tag{5.3}$$

Nach (5. 3) werden also die Übertragungsparameter von $\overset{0}{A}_m$ die Form

$$\Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma = L_i{}^j{}_k\,\xi^i_\alpha \xi^\beta_j \xi^k_\gamma \tag{5.4}$$

haben, wo nach (3. 3)

$$\xi^\varrho_t \overset{\text{def}}{=} a^{\varrho\sigma} g_{tj}\,\xi^j_\sigma \tag{5.5}$$

ist. Da wir jetzt Normalkoordinaten benützt haben ist nach (5. 4)

$$L_i{}^j{}_k(0, \ldots, 0) = 0, \quad \Phi_\alpha{}^\beta{}_\gamma(0, \ldots, 0) = 0,$$

und somit wird wegen

$$\overset{*}{R}_\alpha{}^\beta{}_{\gamma\delta} \overset{\text{def}}{=} 2\,\partial_{[\delta}\Phi_{|\alpha|}{}^\beta{}_{\gamma]} + 2\,\Phi_\alpha{}^\tau{}_{[\gamma}\Phi_{|\tau|}{}^\beta{}_{\delta]}$$

im Punkte $x^i = 0$ die Relation

$$\overset{*}{R}_\alpha{}^\varrho{}_{\gamma\delta}\Big|_{u^\varkappa=0} = \overset{*}{R}_i{}^t{}_{kl}\,\xi^i_\alpha \xi^\varrho_t \xi^k_\gamma \xi^l_\delta\Big|_{x^j=0}$$

bestehen. Beachten wir jetzt (5. 5), so wird nach einer Kontraktion mit $a_{\beta\varrho}$ unsere letzte Gleichung eben in die Formel (5. 2) übergehen, w. z. b. w.

Nach unserer Bedingung war im Satz 8 die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ symmetrisch, und somit ist die Übertragung in Bezug auf g_{ik} sicher nicht-metrisch. Wäre nämlich die Übertragung in Bezug auf g_{ik} metrisch, so würde neben (1. 9) auch noch (1. 13) bestehen, und dann wäre nach (1. 14) $A_{ijk} = 0$, der Raum $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$ wäre somit mit dem Riemannscher Raum $\mathfrak{R}_n$ identisch.

Aus dem Satz 8 ergibt sich leicht das folgende

K o r o l l a r. *Ist der Raum* $\overset{*}{\mathfrak{R}}_n$ *in einem Punkte* P_0 *ein Raum von skalarer Krümmung zweiter Gattung, so ist in* P_0 *auch jeder autoparallele* *m-dimensionale Unterraum ein $\mathfrak{R}^*_m$-Raum von skalarer Krümmung zweiter Gattung.*

Beweis. Nach unserer Annahme ist in P_0 die Relation (2.2) gültig. In P_0 hat aber der Krümmungstensor $R^*_{\alpha\beta\gamma\delta}$ von $\mathfrak{R}^*_m$ die Form (5.2). Setzen wir R^*_{ijkm} von (2.2) in (5.2) ein, so wird in P_0

$$R^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = 2R^* h_{\alpha[\gamma} a_{|\beta|\delta]}, \quad h_{\alpha\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ij} \xi^i_\alpha \xi^j_\gamma,$$

w. z. b. w.

§ 6. Beispiele für die $\mathfrak{R}^*_n$-Räume von skalarer Krümmung

Wir nehmen an, daß der Basisraum $\mathfrak{R}_n$ ein Riemannscher Raum von skalarer Krümmung ist, d. h. der Krümmungstensor $R_i{}^j{}_{kl}$ die Form (0.2) hat. Setzen wir

$$\varLambda_{ijk} = p_i g_{jk},$$

wo p_i einen kovarianten Vektor bedeutet und beachten, daß dann die kovariante Ableitung ∇_l von g_{ik} identisch verschwindet, so bekommen wir nach (1.7)

$$S_{ijkl} = g_{jk}(\nabla_l p_i - p_i p_l) - g_{jl}(\nabla_k p_i - p_i p_k). \tag{6.1}$$

Mit der Bezeichnung

$$\gamma_{ik} = p_i p_k - \nabla_k p_i + R g_{ik} \tag{6.2}$$

bekommt man auf Grund von (0.2)[8]) und (6.1) aus der Formel (1.6):

$$R^*_{ijkl} = 2\gamma_{i[k} g_{|j|l]}; \tag{6.3}$$

der $\mathfrak{R}^*_n$-Raum ist also von skalarer Krümmung zweiter Gattung. Es ist $R^* \equiv 1$. Ist noch p_i ein Gradientenvektor, so ist nach (1.1) (b) und (6.2) der Tensor γ_{ik} in i, k symmetrisch.

Wählen wir aber

$$\varLambda_{ijk} = p_j g_{ik},$$

so bekommen wir aus (1.7)

$$S_{ijkl} = g_{ik}(\nabla_l p_j + p_i p_l) - g_{il}(\nabla_k p_j + p_j p_l). \tag{6.4}$$

Nehmen wir jetzt für γ_{ik} den Tensor

$$\gamma_{jl} = \nabla_l p_j + p_j p_l + R g_{jl},$$

so wird nach (0.2) und (6.4) aus der Formel (1.6)

$$R^*_{ijkl} = 2 g_{i[k} \gamma_{|j|l]}; \tag{6.5}$$

[8]) Selbstverständlich müssen wir in der Formel (0.2) den Index j herabziehen.

der Krümmungstensor hat also die Form (2. 2a) mit $R^* \equiv 1$. Die Übertragungsparameter $L_i{}^j{}_k$ sind in diesem Falle symmetrisch in i, k, und falls p_j ein Gradientenvektor ist, so ist auch γ_{ik} symmetrisch.

Um ein Beispiel für den Typ (2. 3) zu bekomen, nehmen wir

$$A_{ijk} = g_{ij} p_k, \quad p_k = \partial_k p.$$

Es ist jetzt:

$$R^{*}{}_i{}^j{}_{kl} \equiv R_i{}^j{}_{kl}.$$

Besteht noch (0. 2), so ist der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung dritter Gattung.

Um einen Typ (2. 1) für den Krümmungstensor zu bekommen, nehmen wir für A_{ijk} die Form:

$$A_{ijk} = p_j \gamma_{ik},$$

wo für γ_{ik} die Relationen

$$(6.6) \quad p_j \nabla_l \gamma_{ik} = p_{lj} \gamma_{ik} - g_{rj}(\partial_l \Gamma_i{}^r{}_k + \Gamma_i{}^t{}_k \Gamma_t{}^r{}_l), \quad \nabla_l p_j + p_{lj} + p^t \gamma_{tl} p_j = \gamma_{jl}$$

bestehen. Offenbar bildet (6. 6) ein Differentialgleichungssystem für γ_{ik}, p_{ik}, g_{ik} und p_j. Es wird jetzt nach (1. 7):

$$(6.7) \qquad S_{ijkl} = 2\gamma_{i[k}(\nabla_{l]} p_j + p_{l]j} + p^t \gamma_{|t|l]} p_j) - R_{ijkl}.$$

Auf Grund der zweiten Formel von (6. 6) wird die Formel (1. 6) wegen (0. 2) und (6. 7) die Relation

$$R^*_{ijkl} = 2\gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]}$$

ergeben; der $\mathfrak{R}_n^*$-Raum ist somit ein Raum von skalarer Krümmung erster Gattung.

Zum Schluß wollen wir noch darauf hinweisen, daß *ein zweidimensionaler $\mathfrak{R}_2^*$-Raum, falls die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf den Grundtensor g_{ik} metrisch ist, immer als einen $\mathfrak{R}_2^*$-Raum von skalarer Krümmung von erster und zugleich von dritter Gattung betrachtet werden kann.*

Ist nämlich die Übertragung $\overset{*}{\nabla}_k$ in Bezug auf g_{ik} metrisch, so ist (1. 9) gültig, und der Krümmungstensor R^*_{ijkl} ist — wie das in § 1 bemerkt wurde — in i, j und selbstverständlich nach seiner Definitionsformel auch in k, l schiefsymmetrisch. Im zweidimensionalen Fall hat also R^*_{ijkl} im wesentlichen die einzige von Null verschiedene Komponente: $R^*{}_{1212}$. Die beiden Tensoren

$$(6.8) \qquad \Gamma_{ijkl} \overset{\text{def}}{=} 2\gamma_{i[k}\gamma_{|j|l]} \quad \text{und} \quad G_{ijkl} \overset{\text{def}}{=} 2g_{i[k}g_{|j|l]},$$

wo γ_{ik} einen beliebiger Tensor zweiter Stufe ist, haben aber dieselben schiefsymmetrischen Eigenschaften, wie R^*_{ijkl}. Sie haben also im $\mathfrak{R}_2^*$-Raum auch nur eine von Null verschiedene Komponente, nämlich Γ_{1212} bzw. G_{1212}. Γ_{ijkl} und G_{ijkl} stimmen also im $\mathfrak{R}_2^*$ bis auf einen skalaren Faktor mit $\mathfrak{R}_{ijkl}^*$ überein, d. h. es ist

$$R_{ijkl}^* = R_{(\Gamma)}^* \Gamma_{ijkl}, \quad R_{ijkl}^* = R_{(G)}^* G_{ijkl}.$$

Im allgemeinen ist natürlich $R_{(\Gamma)}^* \neq R_{(G)}^*$. Nach (6. 8) drückt das eben unsere Behauptung aus.

Für wertvolle Bemerkungen spreche ich den Herrn Professoren H. RUND und O. VARGA meinen besten Dank aus.

Literatur

[1] A. DUSCHEK - W. MAYER, *Lehrbuch der Differentialgeometrie.* II (Leipzig und Berlin, 1930).
[2] L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry* (Princeton, 1949).
[3] L. P. EISENHART, A unified theory of general relativity of gravitation and electromagnetism. I - IV, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **42** (1956), 249 - 251, 646—650, 878—881 und **43** (1957), 333—336.
[4] L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry* (New York, 1927).
[5] J. I. HORVÁTH, Zur Geometrisierung des elektromagnetischen Feldes, *Il Nuovo Cimento,* X, 7 (1958), 636—648.
[6] A. MOÓR, Untersuchungen in Räumen mit rekurrenter Krümmung, *Journal für die reine und angew. Math.*, **199** (1958), 91—99.
[7] J. A. SCHOUTEN, *Ricci calculus* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954).
[8] V. HLAVATY, The Holonomy Group I. The Curvature Tensor, *Journal of Math. and Mech.*, **8** (1959), 285—307.

(Eingegangen am 1. August 1959)